

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 5-6 КЛАССА
РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН
ПО МАТЕМАТИКЕ
2025-2026 УЧЕБНЫЙ ГОД
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

5 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Бумажная полоска разделена на 2025 клеток. Амир зачеркивает каждую седьмую клетку, Дамир - из оставшихся каждую пятую клетку, Камиль - из оставшихся зачеркнул каждую третью клетку. А Шамиль зачеркнул все клетки, что остались. Сколько клеток зачеркнул Шамиль?

Ответ: 926.

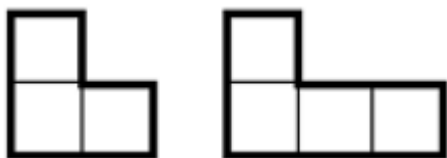
Решение.

$2025 = 7 \cdot 289 + 2$. Амир зачеркнул каждую седьмую клетку из 2025, то есть 289. После этого осталось $2025 - 289 = 1736$ клеток.

$1736 = 5 \cdot 347 + 1$. Дамир зачеркнул каждую пятую, то есть 347 клеток. Осталось $1736 - 347 = 1389$ клеток.

$1389 = 3 \cdot 463$. Камиль зачеркнул каждую третью клетку. Осталось $1389 - 463 = 926$ клеток.

2. Составьте какой-нибудь квадрат, используя плитки двух типов (см. рисунок). Плитка каждого типа должна быть использована хотя бы один раз.



Решение.

Например, составим квадрат 14×14 из 7 таких полосок:



3. В волшебном ожерелье, представляющем круг из 14 бусин, есть хотя бы одна розовая и хотя бы одна зеленая, бусины бывают только этих цветов. Каждую секунду происходит волшебство: бусина, у которой обе соседки были одного цвета, становится розовой, а бусина, у которой соседки были разных цветов, становится зеленой. Могут ли все бусины в некоторый момент времени одновременно стать зелеными?

Ответ. Не могут.

Решение. Пусть все бусины стали зелеными. Рассмотрим момент до этого. Пронумеруем бусины. Чтобы бусины с чётными номерами стали зелеными, их соседи должны быть разных цветов. То есть в парах 1 и 3, 3 и 5, 5 и 7, 7 и 9, 9 и 11, 11 и 13 — бусины разных цветов. Значит, бусины 1, 5, 9 и 13 — одного цвета. Но тогда у бусины 14 два соседа (1 и 13) одного цвета, и она не сможет стать зелёной. Значит, этого никогда не будет.

4. В одной школе отличники всегда говорят правду, а двоечники всегда лгут. Однажды 65 школьников по очереди были вызваны к директору. Каждый из них после этого сказал: «Среди людей, бывших в кабинете директора до меня, отличников ровно на 20 меньше, чем двоечников». Сколько отличников было среди 65 школьников?

Ответ. 23.

Решение. Первые 20 человек — двоечники, потому что до них всего было сделано не больше 19 заявлений, а значит, истинных не может быть ровно на 20 меньше, чем ложных. Далее 21-й человек говорит правду (ведь до него было ровно 20 ложных заявлений), значит, он отличник. Затем 22-й говорит неправду (до него было 20 ложных и 1 истинное заявление), значит, он двоечник. Далее 23-й человек говорит правду (ложных заявлений опять стало на 20 больше, чем истинных), значит, 23-й отличник, и так далее. Среди школьников, начиная с 21-го, те, кто с нечётными номерами, — отличники, а те, кто с чётными, — двоечники. Среди чисел от 21 до 65 включительно ровно 23 нечётных, поэтому отличников было ровно 23.

5. Перед фокусником лежат две кучки конфет: в одной 20 конфет, а во второй — 25. Фокус «Добавляйтус» увеличивает количество конфет в одной куче на 6, но уменьшает количество конфет в другой куче на 1. А фокус «Забирайтус» уменьшает количество конфет в одной куче на 3, а в другой — на 7. Оба фокуса срабатывают только в случае, когда в кучах

достаточно конфет, чтобы их количество можно было уменьшить. Может ли фокусник такими фокусами получить в одной куче 22 конфеты, а в другой - 55?

Ответ: нет, не может.

Решение. Посмотрим, как меняется общее число конфет. При использовании фокуса «Добавляйтус» количество конфет увеличивается на 6 и уменьшается на 1, значит, в итоге увеличивается на $6-1=5$. При использовании фокуса «Забирайтус» количество конфет уменьшается на 3 и на 7, то есть в итоге уменьшается на $3+7=10$. Числа 5 и 10 делятся на 5, как и изначальное количество конфет $20+25=45$. Поэтому у фокусника общее число конфет всегда будет делиться на 5. С другой стороны, спрашивается, может ли стать конфет $22+55=77$. Так как это число на 5 не делится, то добиться указанного числа конфет в кучах не получится.

6 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. В одном из лунных городов имеют хождение монеты в 13, 21 и 29 фертингов, а монет с другим номиналом нет. Однажды Пончик купил бутерброд, расплатившись несколькими монетами по 21 фертингу, и получил на сдачу на 4 монеты больше, чем дал продавцу, причём монеты всех трёх видов участвовали в обмене. Мог ли бутерброд стоить 4 фертинга?

Решение. Да, мог. Например, Пончик выдал 9 монет по 21 фертингу, а получил на сдачу 12 монет по 13 фертингов и 1 монету по 29 фертингов.

2. Сравнить дроби:

$$\frac{\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}}{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}}{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}}$$

Ответ. Первая дробь меньше.

Решение. Пусть $\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = x$, $\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} = y$.

Тогда нужно сравнить $\frac{x}{y}$ и $\frac{x + \frac{1}{2025}}{y + \frac{1}{2025}}$. Или $xu + \frac{x}{2025}$ и $xu + \frac{y}{2025}$. Т.к. $x < y$, то первая дробь меньше.

3. На острове живут три племени: эльфы, гоблины и гномы. Однажды 16 островитян, среди которых были представители всех трёх племён, встали в клетках квадрата 4×4 так, что в одной клетке квадрата 1×1 оказался ровно один островитянин. Каждый из них сказал: «Ровно один мой сосед – эльф (соседями считают островитян, которые стоят в квадратах 1×1 , имеющих общую сторону)». Известно, что эльфы всегда говорят правду, гоблины всегда лгут, а гномы говорят правду только тогда, когда имеют хотя бы одного соседа – эльфа. Какое наибольшее количество эльфов могло оказаться среди этих 16 островитян? Приведите пример такого расположения островитян и докажите, что большего количества эльфов быть не могло.

Решение. 8 эльфов.

Разобьём квадрат на четыре квадрата 2×2 . В каждом таком квадрате не более 2 эльфов, иначе они образуют уголок из трёх клеток, и средний эльф в этом уголке соврал, чего не может быть.

Пример на 8 эльфов:

Э	Э	ГО	Э
ГО	ГО	ГН	Э
Э	Э	ГО	ГО
ГН	ГО	Э	Э

4. Однажды Сабина убегала от хулигана Ромы. Около магазина «Чёрное и жёлтое», Рома оказался через 10 секунд после Сабины, остановился на некоторое время и продолжил погоню. У подъезда Сабины он оказался ровно в тот момент, когда Сабина захлопнула дверь. Если бы Рома не задерживался около магазина, то он догнал бы Сабину в 8 метрах от подъезда. Сколько секунд Рома стоял около магазина, если известно, что магазин находится в 48 метрах от подъезда? Скорости бега Ромы и Сабины всегда постоянные.

Ответ: 2 секунды.

Решение. Когда Рома достиг магазина, Сабина опережала его на 10 секунд. Если бы Рома не останавливался, то догнал бы Сабину через 40 м. Значит, он после каждых пройденных 4 м сокращал отставание от Сабины на 1 секунду. Так как он догнал ее на 8 м дальше, то около магазина он стоял 2 секунды.

5. По кругу сели 2025 человек. В начале одному из них выдали 2024 конфеты, а его соседу (по часовой стрелке) – одну конфету. Каждую секунду те, у кого имеются конфеты, передают по одной конфете ближайшему по часовой стрелке от себя человеку у которого конфет нет (например, через секунду у первого будет 2023 конфеты, у третьего – две). Может ли в какой-то момент у каждого из сидящих в этом круге оказаться ровно по одной конфете?

Решение. Пусть такое возможно. Рассмотрим последнюю передачу конфет. Одна конфета может быть, если было две и одну передали, ничего при этом не получив, или, когда у нас было 0 конфет, а мы получили одну. Заметим, что люди с нулём и двумя конфетами должны чередоваться, т.к. если две «двойки» конфет подряд, то ближайший «ноль» получит более одной конфеты, а если два «нуля» подряд, то один из них конфет не получит. Тогда все в кругу должны разбиться на пары 2 конфеты – 0 конфет, т.е. в кругу должно быть чётное число людей.